第17講　微分法・積分法(3)

1 [1]　次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^3 |x^2-x-2|dx$

[2]　0以上の実数 t に対し，$F(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-t^2|dx$ とする．

(1)　$F(t)$ を t の関数として表せ．

(2)　関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $C: y=x(x-a)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) 直線 $l: y=ax$ と C との交点で，原点とは異なる点の座標を求めよ．

(2) C と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) C と l とで囲まれた図形 D の面積を求めよ．

(4) 点 $(a,\ 0)$ を通り，図形 D の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　2つの放物線 $C_1 : y=x^2+4$，$C_2 : y=-x^2+4x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する2本の直線 l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　C_1 と，(1)における l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　微分法・積分法(3)

放物線 $y=x^2-4x+6$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　点 (3，－1) からこの放物線に引いた 2 本の接線の方程式は

$y=$ [ア] $x-$ [イウ]，$y=-$ [エ] $x+$ [オ] である．

(2)　(1)で求めた接線と放物線で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　微分法・積分法(3)

1 [1]　次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^3|x^2-x-2|dx$

$$\int_0^3|x^2-x-2|dx=\int_0^2(-x^2+x+2)dx+\int_2^3(x^2-x-2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$$
$$=-\frac{8}{3}+2+4+\frac{1}{3}(27-8)-\frac{1}{2}(9-4)-2(3-2)=\boldsymbol{\frac{31}{6}}$$

1 [2]　0以上の実数 t に対し，$F(t)=\displaystyle\int_0^1|x^2-t^2|dx$ とする．

(1)　$F(t)$ を t の関数として表せ．

(2)　関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値を求めよ．

(1)　(i)　$1\leqq t$ のとき　$F(t)=\displaystyle\int_0^1(-x^2+t^2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^1=t^2-\frac{1}{3}$

(ii)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき　$F(t)=\displaystyle\int_0^t(-x^2+t^2)dx+\int_t^1(x^2-t^2)dx$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^t+\left[\frac{1}{3}x^3-t^2x\right]_t^1$$
$$=\left(-\frac{1}{3}t^3+t^3\right)+\left(\frac{1}{3}-t^2\right)-\left(\frac{1}{3}t^3-t^3\right)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$

よって　$\boldsymbol{F(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3} & (0\leqq t\leqq 1)\\ t^2-\dfrac{1}{3} & (1\leqq t)\end{cases}}$

(2)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき　$F'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)$

よって増減は右表のようになる．

$1\leqq t$　のときはこの範囲で　$F(t)$ は単調増加．

よって　$F(t)$ が最小となる t の値は　$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$F'(t)$	0	$-$	0	$+$
$F(t)$		↘		↗

↑ 最小値（$t=\frac{1}{2}$ の列）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $C : y=x(x-a)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1)　直線 $l : y=ax$ と C との交点で，原点とは異なる点の座標を求めよ．

(2)　C と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(3)　C と l とで囲まれた図形 D の面積を求めよ．

(4)　点 $(a,\ 0)$ を通り，図形 D の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

(1)　$x(x-a)=ax$　で $x\neq 0$ のとき　$x-a=a$　　$x=2a$

よって求める点の座標は　$\boldsymbol{(2a,\ 2a^2)}$

(2)　求める面積は　$-\int_0^a x(x-a)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{1}{6}a^3}$

【別解】　$-\int_0^a x(x-a)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(a-0)^3\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{6}a^3}$

(3)　求める面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{2a}\{ax-(x^2-ax)\}dx=\int_0^{2a}(-x^2+2ax)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+ax^2\right]_0^{2a}=\boldsymbol{\frac{4}{3}a^3}$$

【別解】　$S_1=\int_0^{2a}\{ax-(x^2-ax)\}dx=\int_0^{2a}(-x^2+2ax)dx=-\int_0^{2a}x(x-2a)dx$

$$=\frac{1}{6}(2a)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}a^3}$$

(4)　C と l，および直線 $x=a$ で囲まれた原点を含む方の図形の面積は

$$\int_0^a\{ax-(x^2-ax)\}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+ax^2\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3=\frac{1}{2}S_1$$

よって題意の直線の方程式は　$\boldsymbol{x=a}$

3　2 つの放物線 $C_1 : y=x^2+4$，$C_2 : y=-x^2+4x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する 2 本の直線 l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　C_1 と，(1)における l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)　C_1 で $y'=2x$　よって　$x=t$ における C_1 の接線の方程式は

$y=2t(x-t)+t^2+4$　つまり　$y=2tx-t^2+4$　……①

C_2 で $y'=-2x+4$　よって　$x=s$ における C_2 の接線の方程式は

$y=(-2s+4)(x-s)-s^2+4s$　つまり　$y=(-2s+4)x+s^2$　……②

①と②が一致するとき

$2t=-2s+4$　かつ　$-t^2+4=s^2$　　これらより　$(s,\ t)=(0,\ 2),\ (2,\ 0)$

したがって，l_1 と l_2 は　$\boldsymbol{y=4x,\ y=4}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　l_1 と l_2 の交点の x 座標は　$x=1$

よって求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1 (x^2+4-4)dx+\int_1^2 (x^2+4-4x)dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 (x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$\left(※\quad \int_1^2 (x^2-4x+4)dx=\int_1^2 (x-2)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2=-\frac{1}{3}(-1)^3=\frac{1}{3}\right)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　微分法・積分法(3)

放物線 $y=x^2-4x+6$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　点 $(3,\ -1)$ からこの放物線に引いた 2 本の接線の方程式は

$y=$ ア $x-$ イウ ，$y=-$ エ $x+$ オ である．

(2)　(1)で求めた接線と放物線で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}$ である．

(1)　$y=x^2-4x+6$　より　$y'=2x-4$

$x=t$ におけるこの放物線の接線は　$y=(2t-4)(x-t)+t^2-4t+6$

つまり　$y=(2t-4)x-t^2+6$　……①

これが点 $(3,\ -1)$ を通るとき

$-1=(2t-4)\cdot 3-t^2+6$　　$t^2-6t+5=0$　よって　$t=5,\ 1$

これらを①に代入して，求める 2 本の接線の方程式は

$y=\mathbf{6}x-\mathbf{19}$，$y=-\mathbf{2}x+\mathbf{5}$

(2)　2 接線の交点の x 座標は　$x=3$　　よって求める図形の面積を S とすると

$$S=\int_1^3\{(x^2-4x+6)-(-2x+5)\}dx+\int_3^5\{(x^2-4x+6)-(6x-19)\}dx$$

$$=\int_1^3(x^2-2x+1)dx+\int_3^5(x^2-10x+25)dx$$

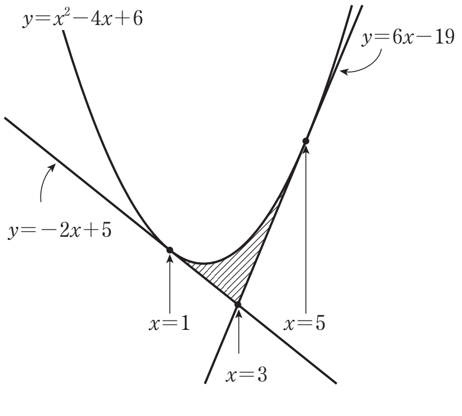
$$=\int_1^3(x-1)^2dx+\int_3^5(x-5)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}(x-5)^3\right]_3^5$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$$

$$=\mathbf{\frac{16}{3}}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。